Beitrag

zur

Berechnung der störenden Kräfte in der Theorie der säcularen Störungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

von der

philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt

und

zugleich mit den Thesen öffentlich zu vertheidigen

am **Sonnabend, den 21. Dezember 1895**

von

Louis Arndt

aus Erfurt,

Assistent an der Sternwarte zu Neuchâtel.

Opponenten:

1) Dr. Schumann, Assistent am Kgl. Geodätischen Institut.
2) A. Berberich, Astronom am Recheninstitut der Kgl. Sternwarte zu Berlin.
3) Dr. F. Plato Technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535723_0143

Gauss hat in seiner Abhandlung: *Determinatio attractionis quam in punctum* etc., Werke Bd. III, ein Theorem aufgestellt, nach dem es möglich ist, bei Berücksichtigung der ersten Potenzen der störenden Massen die säcularen Störungen eines Himmelskörpers durch einen anderen auf eine leichte und bequeme Art zu berechnen.

Er denkt sich die Masse eines störenden Körpers über seine Bahn so vertheilt, dass auf jedes Bogenelement ein der Zeit proportionaler Theil kommt, in welcher der Planet in diesem Bogenelement verweilt; dann lässt sich der säculare Theil der Störungen annehmen als herrührend von dieser ganzen auf der Peripherie vertheilten Planetenmasse. Bezeichnet ds ein Bogenelement, m_1 die Masse des störenden Körpers, U_1 die Umlaufszeit, v_1 die Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle, so ist das Potential der Massenvertheilung

$$\int \frac{ds}{r_1} \cdot \frac{m_1}{U_1 v_1},$$

wobei das Integral über die ganze Peripherie der Ellipse auszudehnen ist. Die partiellen Ableitungen dieses Potentials geben dann die Attractions-Componenten. Durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen an Stelle der excentrischen Anomalie werden diese Componenten in eine Form gebracht, welche die vollständige Integration ermöglicht. Zur Aufstellung dieses Ausdrucks ist die Auflösung einer cubischen Gleichung erforderlich.

Diese Auflösung lässt sich jedoch, wie wir sehen werden, umgehen, und die Attractions-Componenten können dargestellt werden in der Form

$$A\omega + B\eta,$$

wo A und B rationale Functionen der Coefficienten der cubischen Gleichung sind, und ω und η die Perioden der elliptischen Functionen erster und zweiter Gattung bezeichnen. Diese Perioden können durch hypergeometrische Reihen ausgedrückt werden, deren Veränderliche die absolute Invariante der elliptischen Functionen ist, und deren Tabulirung die Berechnung jener Perioden ausserordentlich erleichtert.

Bezeichnet man die Coordinaten des gestörten Körpers mit x, y, z, seine jedesmalige Entfernung von der Sonne mit r und die entsprechenden Grössen des störenden Körpers mit x_1, y_1, z_1, r_1, so lauten die Differential-Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)x}{r^3} = k^2 m_1 \left\{ \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x}{r_1^3} \right\} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)y}{r^3} = k^2 m_1 \left\{ \frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y}{r_1^3} \right\} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)z}{r^3} = k^2 m_1 \left\{ \frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z}{r_1^3} \right\} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

worin die Störungsfunction

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right)$$

und der gegenseitige Abstand beider Himmelskörper

$$\Delta^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

gesetzt ist.

Nimmt man in erster Näherung die Massen der beiden Körper als materielle Punkte an, so erhält man durch Integration der drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung die sechs Elemente der Bahn des Himmelskörpers. Diese Elemente können für einen gegebenen Augenblick als Functionen der Coordinaten und der Componenten der Geschwindigkeit dargestellt werden :

$$\text{II} \qquad c_i = f\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Bezeichnet man die für die ungestörte Bewegung geltenden Grössen mit dem Index Null und führt die osculirende Ellipse ein, wonach die ungestörten Coordinaten und die Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblicke mit den gestörten identisch sind, so werden die Gleichungen bestehen

$$\text{III} \qquad c_i^0 = f\left(x^0, y^0, z^0, \frac{dx^0}{dt}, \frac{dy^0}{dt}, \frac{dz^0}{dt}\right)$$

$$x = x^0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx^0}{dt}, \text{ etc.}$$

Durch Differentiation und Subtraction der Gleichungen II und III und unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x^0}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \text{ etc.}$$

folgt, da c_i^0 als constant angesehen werden muss,

$$\text{IV} \qquad \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

worin

$$\frac{dx}{dt} = x' \text{ etc.}$$

gesetzt wurde.

Substituirt man in die Störungsfunction die elliptischen Elemente, so werden aus Gleichung IV die Störungen erster Ordnung der Elemente erhalten. Die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nach den

Coordinaten bezeichnen die den rechtwinkligen Coordinaten parallelen Componenten der störenden Kraft. Durch Annahme eines beweglichen Coordinatensystems, dessen Anfangspunckt im gestörten Körper liegt, und dessen $x =$ Axe mit dem Radiusvector zusammenfällt, können zur bequemeren numerischen Berechnung die obigen Componenten durch drei andere ersetzt werden, von denen die eine R in der Richtung des Radiusvector wirkt, positiv, wenn der Radius vergrössert wird, die zweite U senkrecht zum Radiusvector, positiv in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers; die dritte Z, senkrecht zur Bahnebene, möge ungeändert bleiben.

Bedeuten nun für den gestörten Körper Ω und i Knotenlänge und Neigung der Bahnebene gegen eine feste Ecliptik; a und e halbe grosse Axe und Excentricität, μ mittlere tägliche Bewegung; v, E, M, wahre, excentrische und mittlere Anomalie; ω Winkelabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten, und setzt man $u = \omega + v$, so erhält man nach der Ausführung der erforderlichen Differentiation aus Gleichung IV für die Variation der Elemente folgende Gleichungen:

$$\sin i \,.\, (\delta\Omega)' = \frac{a\mu \sec\varphi}{1+m} r \sin u \,.\, Z$$

$$(\delta i)' = \frac{a\mu \sec\varphi}{1+m} r \cos u \,.\, Z$$

$$(\delta e)' = \frac{a^2 \mu \cos\varphi}{1+m} \left\{ \sin v \,.\, R + (\cos v + \cos E)\, U \right\}$$

$$e(\delta\omega_1)' = \frac{a^2 \mu \cos\varphi}{1+m} \left\{ -\cos v \,.\, R + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v\, U \right\}$$

$$(\delta\omega)' = (\delta\omega_1)' - \cos i\, (\delta\Omega)'$$

$$(\delta\mu)' = -\frac{3a^2\mu^2}{(1+m)\cos\varphi} \left\{ e \sin v \,.\, R + \frac{p}{r}\, U \right\}$$

$$(\delta M)' = -\frac{2a\mu}{1+m} r \,.\, R + \int (\delta\mu)'\, dt$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Variation eines jeden Elementes dargestellt werden kann in der Form

$$(\delta c_i)' = \Phi_1 R + \Phi_2 U + \Phi_3 Z,$$

wobei die Grössen Φ von den Elementen des störenden Körpers unabhängig sind.

Die Componenten der störenden Kraft sind Functionen der mittleren Anomalien des gestörten und des störenden Körpers, sodass

$$c_i' = F(M, M_1)$$

ist; nach der Theorie der Fourier'schen Reihen wird dann sein

$$c_i' = A_o + \Sigma A i_1 \cos i_1 M_1 + \Sigma B i_1 \sin i_1 M_1,$$

wobei allgemein

$$A i_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(M, M_1) \cos i_1 M_1 . dM_1$$

ist[1]. Man erhält nun aus dieser Entwicklung den von der Zeit unabhängigen Theil in Bezug auf M_1, wenn man $i_1 = o$ setzt, sodass also:

$$c_i' = A_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(M, M_1)\, dM_1 ;$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nur eine Function von M_1, und es sei

$$c_i' = F_1(M),$$

woraus dann unter nochmaliger Anwendung des obigen Satzes folgt

$$c_i' = A_o' + \Sigma A_i' \cos iM + \Sigma B_i' \sin iM$$

$$A_i' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(M) \cos iM . dM$$

[1] Seeliger, *Astronom. Nachrichten*, Bd. 54.

Setzt man in diesem Ausdruck wieder $i = o$, so folgt

$$c_i' = A_o' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(M)\, dM,$$

sodass schliesslich die säculare Veränderung eines Elementes in folgender Form erhalten wird :

$$(\delta c_i)' = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_1 R + \Phi_2 U + \Phi_3 Z)\, dM.\, dM_1 .$$

Mit Rücksicht auf das oben eingeführte bewegliche Coordinatensystem haben die Componenten der störenden Kraft die Form

$$R = m_1 \left(\frac{\xi_1 - r}{\Delta^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right), \qquad U = m_1 \left(\frac{\eta_1}{\Delta^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right),$$

$$Z = m_1 \left(\frac{\zeta_1}{\Delta^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right).$$

In diesen Ausdrücken geben die zweiten Glieder bei der Integration nur periodische Glieder, indem nämlich für die Störungen I. Ordnung die Gleichungen bestehen

$$-k^2 (1 + m_1) \frac{\xi_1}{r_1^3} = \frac{d^2 \xi_1}{dt^2}, \qquad -k^2 (1 + m_1) \frac{\eta_1}{r_1^3} = \frac{d^2 \eta_1}{dt^2},$$

$$-k^2 (1 + m_1) \frac{\zeta_1}{r_1^3} = \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2};$$

Diese Glieder können also unberücksichtigt bleiben.

Bezieht man alle Grössen auf die Bahnebene des gestörten Planeten und bezeichnet mit J die Neigung der beiden Bahnebenen zu einander, K und K_1 den Abstand des Knotenpunktes beider Bahnen von der Ekliptik, so bestehen die Gleichungen

$$\sin \frac{1}{2} J.\, \sin \frac{1}{2} (K + K_1) = \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega).\, \sin \frac{1}{2} (i_1 + i)$$

$$\sin\frac{1}{2}J.\cos\frac{1}{2}(K+K_1)=\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega).\sin\frac{1}{2}(i_1-i)$$
$$\cos\frac{1}{2}J.\sin\frac{1}{2}(K-K_1)=\sin\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega).\cos\frac{1}{2}(i_1+i)$$
$$\cos\frac{1}{2}J.\cos\frac{1}{2}(K+K_1)=\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega).\cos\frac{1}{2}(i_1-i)$$

Bedeuten weiter L_1 und B_1 die Länge und Breite des störenden Körpers in Bezug auf die gestörte Bahnebene, so ist, wenn $\Pi+v=l$ gesetzt wird

$$\xi_1=r_1B_1\cos(L_1-l),\quad \eta_1=r_1\cos B_1\sin(L_1-l),\quad \zeta_1=r_1\sin B_1.$$

Nun ist aber

$$\cos B_1.\cos L_1=\cos(\Pi_1+v_1)$$
$$\cos B_1.\sin L_1=\sin(\Pi_1+v_1)\cos J$$
$$\sin B_1=\sin(\Pi_1+v_1)\sin J$$

Indem man diese Werte in die obigen Gleichungen einführt, die Gleichungen

$$r_1\cos v_1=a_1(\cos E_1-e_1),\qquad r_1\sin v_1=a_1\cos\varphi_1\sin E_1$$

berücksichtigt und zur Abkürzung setzt:

$$-\sin\Pi_1.\cos J=A.\sin A';\qquad -\sin\Pi_1=B\sin B'$$
$$\cos\Pi_1=A\cos A';\qquad \cos\Pi_1.\cos J=B\cos B'$$
$$Aa_1\cos(A'+\Pi+v)=A_c;\qquad Ba_1\cos\varphi_1\sin(B'+\Pi+v)=A_s$$
$$-Aa_1\sin(A'+\Pi+v)=B_c;\qquad Ba_1\cos\varphi_1\cos(B'+\Pi+v)=B_s$$
$$a_1\sin\Pi_1\sin J=C_c;\qquad a_1\cos\varphi_1\cos\Pi_1\sin J=C_s$$

so erhält man:

$$\xi_1=A_c(\cos E_1-e_1)+A_s\sin E_1$$
$$\eta_1=B_c(\cos E_1-e_1)+B_s\sin E_1$$
$$\zeta_1=C_c(\cos E_1-e_1)+C_s\sin E_1$$

Setzt man weiter zur Abkürzung

$$a_1^2+r^2+2e_1rA_c=A_o,\qquad e_1a_1^2+rA_c=B_o\cos\varepsilon$$
$$r.A_s=B_o\sin\varepsilon,\qquad a_1^2e_1^2=C_o,$$

so folgt für das Quadrat der Entfernung der beiden Himmelskörper

$$\Delta^2 = A_o - 2 B_o \cos(\varepsilon - E_1) + C_o \cos^2 E_1$$

Nach Einführung der excentrischen Anomalie an Stelle der mittleren erscheinen die Componenten der störenden Kraft unter der Form

$$R, U, Z = \frac{f(E_1)}{\Delta^3} .$$

Wie schon erwähnt, kann die Integration nach der excentrischen Anomalie des Körpers vollständig durchgeführt werden. Nach Ausführung derselben, d. h. nach Bildung der Ausdrücke

$$R_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} R(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

$$U_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} U(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} Z(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

werden dann die Variationen der Elemente

$$\delta c_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_1 R_0 + \Phi_2 U_0 + \Phi_3 Z_0)\, dE$$

durch mechanische Quadratur erhalten.

Es handelt sich nun darum die Grössen R_0, U_0, Z_0 zu bilden, wobei man auf die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung kommen wird. Führt man nach Gauss eine neue Integrationsvariable T durch die Gleichungen ein :

$$N\cos E_1 = \alpha + \alpha_1 \sin T + \alpha_2 \cos T$$
$$N\sin E_1 = \beta + \beta_1 \sin T + \beta_2 \cos T$$
$$N = \gamma + \gamma_1 \sin T + \gamma_2 \cos T$$

so sollen die 9 Grössen α, β, γ reelle Coefficienten sein, wenn T reelle Werthe haben soll; es muss also die Gleichung bestehen :

$$(\alpha + \alpha_1 \sin T + \alpha_2 \cos T)^2 + (\beta + \beta_1 \sin T + \beta_2 \cos T)^2 - (\gamma + \gamma_1 \sin T + \gamma_2 \cos T)^2 = 0$$

Da dieser Ausdruck unabhängig von T sein soll, so muss derselbe identisch sein mit

$$k(\cos^2 T + \sin^2 T - 1).$$

Diese Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn man die α, β, γ den folgenden Relationen genügen lässt, wo $k = 1$ angenommen ist :

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1; \quad && \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0 \\ &\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1; \quad && \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 - \gamma\gamma_2 = 0 \\ &\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1; \quad && \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad \cdots \; 1$$

Andererseits muss der Ausdruck

$$(\alpha\cos E_1 + \beta\sin E_1 - \gamma)^2 - (\alpha_1\cos E_1 + \beta_1\sin E_1 - \gamma_1)^2 - (\alpha_2\cos E_1 + \beta_2\sin E_1 - \gamma_2)^2 = 0$$

identisch sein mit

$$k(\cos^2 E_1 + \sin^2 E_1 - 1).$$

wobei k wieder gleich 1 angenommen werden kann, sodass man erhält :

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = -1; \quad && \alpha\beta - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = 0 \\ &\beta^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = -1; \quad && \alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 = 0 \\ &\gamma^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = +1; \quad && \beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad \cdots \; 2$$

Ausserdem wird über die 9 Coefficienten so verfügt, dass der Ausdruck für das Quadrat der Entfernung der beiden Himmelskörper die Form annimmt

$$N^2\Delta^2 = G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T.$$

Aus dieser Gleichung folgen dann die Relationen :

$$\begin{aligned} &G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha_2^2 = C_0; \quad G\alpha\beta - G_1\alpha_1\beta_1 + G_2\alpha_2\beta_2 = 0 \\ &G\beta^2 - G_1\beta_1^2 + G_1\beta_2^2 = 0; \quad G\alpha\gamma - G_1\alpha_1\gamma_1 + G_2\alpha_2\gamma_2 = B_0\cos\varepsilon \quad \cdot 3 \\ &G\gamma^2 - G_1\gamma_1^2 + G_2\gamma_2^2 = A_0; \quad G\beta\gamma - G_1\beta_1\gamma_1 + G_2\beta_2\gamma_2 = B_0\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Schreibt man nun diese sechs Gleichungen in drei Gruppen zu je dreien in der folgenden Weise :

$$\begin{aligned} &\alpha . G\alpha - \alpha_1 . G_1\alpha_1 + \alpha_2 . G_2\alpha_2 = C_0 \\ &\beta . G\alpha - \beta_1 . G_1\alpha_1 + \beta_2 . G_2\alpha_2 = 0 \quad \cdots\cdots 4 \\ &\gamma . G\alpha - \gamma_1 . G_1\alpha_1 + \gamma_2 . G_2\alpha_2 = B_0\cos\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha . G\beta - \alpha_1 . G_1\beta_1 + \alpha_2 . G_2\beta_2 = 0 \\ &\beta . G\beta - \beta_1 . G_1\beta_1 + \beta_2 . G_2\beta_2 = 0 \quad \cdots\cdots 5 \\ &\gamma . G\beta - \gamma_1 . G_1\gamma_1 + \gamma_2 . G_2\beta_2 = B_0\sin\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha . G\gamma - \alpha_1 . G_1\gamma_1 + \alpha_2 . G_2\gamma_2 = B_0\cos\varepsilon \\ &\beta . G\gamma - \beta_1 . G_1\gamma_1 + \beta_2 . G_2\gamma_2 = B_0\sin\varepsilon \quad \cdots\cdots 6 \\ &\gamma . G\gamma - \gamma_1 . G_1\gamma_1 + \gamma_2 . G_2\gamma_2 = A_0 \end{aligned}$$

und multiplicirt die Gleichungen der einzelnen Gruppen mit bezw. $+\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$, so folgen aus jeder Gruppe die Gleichungen

$$\begin{aligned} &G\alpha = -C_0\alpha + \gamma B_0\cos\varepsilon \\ &G\beta = \gamma B_0\sin\varepsilon \quad \cdots\cdots 7 \\ &G\gamma = -\alpha B_0\cos\varepsilon - \beta B_0\sin\varepsilon + \gamma A_0 \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man weiter

$$\begin{aligned} &G_1\alpha_1 = -\alpha_1 C_0 + \gamma_1 B_0\cos\varepsilon \\ &G_1\beta_1 = \gamma_1 B_0\sin\varepsilon \quad \cdots\cdots 8 \\ &G_1\gamma_1 = -\alpha_1 B_0\cos\varepsilon - \beta_1 B_0\sin\varepsilon + \gamma_1 A_0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &-G_2\alpha_2 = -\alpha_2 C_0 + \gamma_2 B_0\cos\varepsilon \\ &-G_2\beta_2 = \gamma_2 B_0\sin\varepsilon \quad \cdots\cdots 9 \\ &-G_2\gamma_2 = -\alpha_2 B_0\cos\varepsilon - \beta_2 B_0\sin\varepsilon + \gamma_2 A_0 \end{aligned}$$

Durch Combination dieser 3 Systeme von Gleichungen ergiebt sich für die Grössen G als Wurzeln die cubische Gleichung

$$x^3(x - A_0)(x + C_0) + B_0^2 x^2 + B_0^2 C_0 \sin^2 E = 0$$

oder

$$x^3 - P_1 x + P_2 x - P_3 = 0 .$$

wobei gesetzt ist

$$P_1 = A_0 - C_0 , \quad P_2 = B_0^2 - A_0 C_0 , \quad - P_3 = C_0 B_0^2 \sin^2 E .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind reel und zwar zwei positiv (G und G_1) und eine negatif (G_2).

Für die Componenten der störenden Kraft hatten sich die Ausdrücke ergeben :

$$m_1 . R_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ A_c (\cos E_1 - e_1) + A_s \sin E_1 - r \right\} (1 - e_1 \cos E_1) \frac{dE_1}{\Delta^3}$$

$$m_1 U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ B_c (\cos E_1 - e_1) + B_s \sin E_1 - r \right\} (1 - e_1 \cos E_1) \frac{dE_1}{\Delta^3}$$

$$m_1 Z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ C_c (\cos E_1 - e_1) + C_s \sin E_1 - r \right\} (1 - e_1 \cos E_1) \frac{dE_1}{\Delta^3}$$

Nach Einführung der neuen Integrationsvariablen T in diese Ausdrücke wird jede dieser Componenten dargestellt in der Form :

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma + \Gamma_1 \sin^2 T + \Gamma_2 \cos^2 T}{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^{3/2}} \, dT$$

wobei unter Berücksichtigung, dass die Glieder mit $\sin T$, $\cos T$ und $\sin T . \cos T$ bei der Integration Null ergeben, gesetzt wurde

$$\Gamma = f . \gamma^2 + b . \alpha\gamma + h . \beta\gamma - d . \alpha\beta - l . \alpha^2$$
$$\Gamma_1 = f . \gamma_1^2 + b . \alpha_1\gamma_1 + h . \beta_1\gamma_1 - d . \alpha_1\beta_1 - l . \alpha_1^2$$
$$\Gamma_2 = f . \gamma_2^2 + b . \alpha_2\gamma_2 + h . \beta_2\gamma_2 - d . \alpha_2\beta_2 - l . \alpha_2^2$$

Hierbei haben dann die Coefficienten der Reihe nach für R_0, U_0, Z_0 die Werte

$$
\begin{array}{lll}
f = -A_c e_1 - r, & -B_c e_1, & -C_c e_1 \\
b = A_c(1+e_1^2) + r e_1, & B_c(1+e_1^2), & C_c(1+e_1^2) \\
h = A_s, & B_s, & C_s \\
d = A_s e_1, & B_s e_1, & C_s e_1 \\
l = A_c e_1, & B_c e_1, & C_c e_1
\end{array}
$$

Setzt man

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T}},$$

so ist

$$\frac{\partial W}{\partial G} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = +\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T.\, dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T.\, dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

und das obige Integral geht über in

$$V = -\frac{1}{\pi}\left(\Gamma \frac{\partial W}{\partial G} - \Gamma_1 \frac{\partial W}{\partial G_1} + \Gamma_2 \frac{\partial W}{\partial G_2}\right);$$

Es handelt sich nun darum, die partiellen Differentialquotienten durch die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung auszudrücken. Zu diesem Zwecke setze ich

$$\sin^2 T = t \quad \text{und} \quad \frac{G_1 + G_2}{G + G_2} = k^2 \quad \text{(Modul)};$$

da nun für die Grenzen des Integrals

$$t = o \quad \text{für} \quad T = o$$

$$t = +1 \quad \text{für} \quad T = \frac{\pi}{2}$$

und ferner

$$dT = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial W}{\partial G} = +\frac{1}{2}\frac{1}{(G+G_2)^{3/2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(G+G_2)^{3/2}}\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = +\frac{1}{2}\frac{1}{(G+G_2)^{3/2}}\int_0^1 \frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

Um auf die Weyerstrass'sche Form der elliptischen Functionen zu kommen, setze ich in diesen Ausdrücken

$$\frac{1}{1-k^2t} = -m(s-G)$$

$$\frac{t}{1-k^2t} = -m_1(s-G_1)$$

$$\frac{1-t}{1-k^2t} = -m_2(s+G_2)$$

wobei s eine neue Variable bedeutet und m, m_1, m_2 willkührliche Coefficienten darstellen, über die ich in geeigneter Weise verfügen kann.

Durch Differentiation der Gleichungen folgt dann

$$\frac{k^2dt}{(1-k^2t)^2} = -m\,ds; \qquad \frac{dt}{(1-k^2t)^2} = -m_1\,ds;$$

$$\frac{(k^2-1)\,dt}{(1-k^2t)^2} = -m_2\,ds$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die beiden Constanten m_1 und m_2 durch m ausdrücken und zwar ist

$$dt = -\frac{m}{k^2}(1-k^2t)^2\,ds$$

$$dt = -m_1(1-k^2t)^2\,ds$$

$$dt = -\frac{m_2}{k^2-1}(1-k^2t)^2\,ds$$

sodass also

$$m_1 = m \cdot \frac{G + G_2}{G_1 + G_2}, \quad m_2 = m \cdot \frac{G_1 - G}{G_1 + G_2}$$

ist. Ferner folgt

$$t = \frac{G + G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{s - G_1}{s - G}$$

und für die Grenzen hat man

$$t = 0 \quad \ldots \ s = G_1$$
$$t = +1 \ \ldots \ s = -G_2$$

Setze ich nun

$$m = \frac{1}{G - G_1}, \quad (G + G_2)(G - G_1)(G_1 + G_2) = C$$

und

$$\sqrt{4(s - G)(s - G_1)(s + G_2)} = \sqrt{S},$$

so folgt

$$\frac{\partial W}{\partial G} = + \frac{G_1 + G_2}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s - G)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = - \frac{G + G_2}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s - G_1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = + \frac{G_1 - G}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s + G_2)$$

Führt man weiter das elliptische Integral erster Gattung

$$u = \int_{\wp u}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}}$$

als neue Veränderliche ein, so wird, da

$$s - G = \wp u - e_1, \quad s - G_1 = \wp u - e_2, \quad s + G_2 = \wp u - e_3$$

und

$$s = \wp u, \quad \wp \omega = e_1, \quad \wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp \omega' = e_3$$

ist

$$\frac{C}{G_1+G_2}\frac{\partial W}{\partial G} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'}(\wp u - e_1)\,du = -\left(e_1\omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega+\omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

$$\frac{C}{G+G_2}\frac{\partial W}{\partial G_1} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'}(\wp u - e_2)\,du = -\left(e_2\omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega+\omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

$$\frac{C}{G_1-G}\frac{\partial W}{\partial G_2} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'}(\wp u - e_3)\,du = -\left(e_3\omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega+\omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

wobei $\wp$ une σ die bekannten Weyerstrass'schen Functionen und ω, ω', τ_1 und τ_1' die Perioden der elliptischen Functionen sind.

Da nun aber

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega+\omega') = \tau_1+\tau_1', \quad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = \tau_1'$$

ist, so folgt schliesslich

$$\frac{\partial W}{\partial G} = -\frac{G_1+G_2}{C}(e_1\omega+\tau_1)$$
$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = +\frac{G+G_2}{C}(e_2\omega+\tau_1)$$
$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = -\frac{G_1-G}{C}(e_3\omega+\tau_1)$$

Mithin wird

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\Gamma\frac{G_1+G_2}{C}(e_1\omega+\tau_1) + \Gamma_1\frac{G+G_2}{C}(e_2\omega+\tau_1) + \Gamma_2\frac{G_1-G}{C}(e_3\omega+\tau_1)\right\}$$

Die drei Grössen e unterliegen der Beschränkung, dass

$$e_1+e_2+e_3 = 0$$

ist, sodass also, wenn

$$G_1+G_1-G_2 = P_1$$

gesetzt wird

$$e_1 = G - \frac{1}{3} P_1, \quad e_2 = G_1 - \frac{1}{3} P_1, \quad e_3 = -G_2 - \frac{1}{3} P_1$$

ist.

Setze ich nun zur Abkürzung

$$\Lambda = (G_1 + G_2)\Gamma + (G + G_2)\Gamma_1 + (G_1 - G)\Gamma_2$$

und

$$\Theta = (G_1 + G_2)G\Gamma + (G + G_2)G_1\Gamma_1 - (G_1 - G)G_2\Gamma_2,$$

so erhält man schliesslich für R_0, U_0, Z_0 den Ausdruck

$$V = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\Lambda}{C} \left(\eta - \omega \frac{P_1}{3} \right) + \omega \frac{\Theta}{C} \right\}.$$

Die Grössen Λ und Θ enthalten noch die Wurzeln der cubischen Gleichung und müssen nun durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke mögen die auf Seite 11 stehenden drei quadratischen Formen Γ, Γ_1, Γ_2 in folgender Verbindung eingeführt werden:

$$A_1 = -\Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2$$
$$B_1 = G\Gamma - G_1\Gamma_1 + G_2\Gamma_2$$
$$C_1 = \frac{\Gamma}{G} - \frac{\Gamma_1}{G_1} + \frac{\Gamma_2}{G_2};$$

Ausserdem ist

$$G + G_1 - G_2 = P_1$$
$$GG_1 - GG_2 - G_1G_2 = P_2$$
$$GG_1G_2 = P_3$$

Zur numerischen Berechnung der Grössen A_1, B_1, C_1 folgt zunächst aus den Gleichungen auf Seite 11

$$A_1 = f(-\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + b(-\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) + h(-\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) - d(-\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) - l(-\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen Seite 9 reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$A_1 = -f - l$$

oder, wenn für f und l die den drei Componenten entsprechenden Werte eingesetzt werden

$$A_1 = +r, \quad 0, \quad 0.$$

Für den zweiten Ausdruck B_1 ergiebt sich aus denselben Gleichungen

$$B_1 = f(G\gamma^2 - G_1\gamma_1^2 + G_2\gamma_2^2) + b(G\alpha\gamma - G_1\alpha_1\gamma_1 + G_2\alpha_2\gamma_2) + h(G\beta\gamma - G_1\beta_1\gamma_1 + G_2\beta_2\gamma_2) - d(G\alpha\beta - G_1\alpha_1\beta_1 + G_2\alpha_2\beta_2) - l(G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha_2^2);$$

oder mit Benutzung der Gleichungen 3, Seite 10

$$B_1 = f.A_0 + b.B_0\cos\varepsilon + hB_0\sin\varepsilon - l.C_0.$$

Zur Berechnung der Grössen B_1^{II} und B_1^{Z} erscheint dieser Ausdruck als der bequemste; die dritte Grösse B_1^{U} wird aus dieser Gleichung etwas unsicher erhalten, da in derselben die Differenz zweier Zahlen, die nicht viel von einander verschieden sind, auftritt. Es ist daher vorzuziehen, die ursprünglichen Werte wieder einzuführen. Unter Berücksichtigung der Gleichungen auf Seite 12 erhält man dann

$$B_1^{U} = -\frac{1}{2}r.a_1^2\cos^2\varphi_1\sin^2 J.\sin 2(\Pi + v) - r^2 e_1 B_c.$$

Um schliesslich noch einen Ausdruck für die Grösse

$$C_1 = f\left(\frac{\gamma^2}{G} - \frac{\gamma_1^2}{G_1} + \frac{\gamma_2^2}{G_2}\right) + b\left(\frac{\alpha\gamma}{G} - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2}\right) + h\left(\frac{\beta\gamma}{G} - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2}\right) - d\left(\frac{\alpha\beta}{G} - \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2}\right) - l\left(\frac{\alpha^2}{G} - \frac{\alpha_1^2}{G_1} + \frac{\alpha_2^2}{G_2}\right)$$

abzuleiten, multiplicire ich die erste der Gleichungen 3, Seite 10

$$G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha^2 = C_0$$

mit der Gleichung

$$G + G_1 \quad G_2 = P_1$$

dann die Gleichung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha^2 = +1$$

mit

$$GG_1 - GG_2 - G_1G_2 = P_2$$

Durch Addition der entstehenden Producte folgt dann:

$$\alpha^2 G_1G_2 - \alpha_1^2 GG_2 + \alpha_2^2 GG_1 = + P_2 + P_1C_0 + \alpha_2^2 G_2^2 + \alpha_1^2 G_1^2 - \alpha^2 G^2$$

Die drei quadratischen Glieder der rechten Seite kann ich erhalten, wenn ich multiplicire:

$$\begin{aligned} G\alpha &= -C_0\alpha + B_0 \cos\varepsilon.\gamma \quad \text{mit} - G\alpha \\ G_1\alpha_1 &= -C_0\alpha_1 + B_0 \cos\varepsilon.\gamma_1 \text{ mit} \quad G_1\alpha_1 \\ G_2\alpha_2 &= +C_0\alpha_2 - B_0 \cos\varepsilon.\gamma_2 \text{ mit} \quad G_2\alpha_2 \end{aligned}$$

und die entstehenden Producte wieder addire:

$$G_2^2\alpha_2^2 + G_1^2\alpha_1^2 - G^2\alpha^2 = C_0^2 - B_0^2\cos^2\varepsilon,$$

sodass man, wenn obige Gleichung noch durch

$$GG_1G_2 = -P_3$$

dividirt wird, die Gleichung erhält:

$$\frac{\alpha^2}{G} - \frac{\alpha_1^2}{G_1} + \frac{\alpha_2^2}{G_2} = -\frac{1}{P_3}(P_2 + P_1C_0 + C_0^2 - B_0^2\cos^2\varepsilon) = \frac{B_0^2\sin^2\varepsilon}{-P_3}$$

Mit Benutzung der anderen Gleichungen der Gruppen 3, 7, 8, 9 auf Seite 10 ergiebt sich auf analoge Weise:

$$\frac{\gamma^2}{G} - \frac{\gamma_1^2}{G_1} + \frac{\gamma_2^2}{G_2} = -\frac{1}{P_3}(-P_2 + P_1A_0 + B_0^2 - A_0^2) = 0$$

$$\frac{\alpha\beta}{G} - \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2} = \frac{1}{-P_3} \cdot B_0^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\frac{\alpha\gamma}{G} - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2} = \frac{B_0\cos\varepsilon}{-P_3}(P_1 + C_0 - A_0) = 0$$

$$\frac{\beta\gamma}{G} - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2} = \frac{B_0\sin\varepsilon}{-P_3}(P_1 - A_0) = \frac{-C_0B_0\sin\varepsilon}{-P_3}$$

Die drei Glieder der quadratischen Form lassen sich nun in folgender Weise darstellen :

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{\gamma^2}{G} f + \frac{\alpha\gamma}{G} b + \frac{\beta\gamma}{G} h - \frac{\alpha\beta}{G} d - \frac{\alpha^2}{G} l$$

$$-\frac{\Gamma_1}{G_1} = -\frac{\gamma_1^2}{G_1} f - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} b - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} h + \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} d + \frac{\alpha_1^2}{G_1} l$$

$$\frac{\Gamma_2}{G_2} = \frac{\gamma_2^2}{G_2} f + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2} b + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2} h - \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2} \frac{\alpha_2^2}{G_2} l$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man unter Berücksichtigung der darüberstehenden Ausdrücke

$$-P_3 C_1 = B_0 \sin\varepsilon\,(d.B_0\cos\varepsilon - l.B_0\sin\varepsilon - h.C_0)$$

Führt man in diese Gleichung die auf Seite 12 stehenden Werte für die Coefficienten d, l, h ein, so ergeben sich für C_1 die den drei Componenten entsprechenden Ausdrücke

$$C_1^{\mathrm{R}} = 0$$

$$P_3 C_1^{\mathrm{U}} = A_s r^2 e_1 (A_c B_s - A_s B_c) - A_s r^2 e_1 A.B.a_1^2 \cos\varphi_1 \cos(A' - B')$$

$$-P_3 C_1^{\mathrm{Z}} = A_s r^2 e_1 (A_c C_s - A_s C_c)$$

Mit Hülfe dieser Werte sollen nun die Coefficienten

$$\Lambda = (G_1 + G_2)\Gamma + (G + G_2)\Gamma_1 + (G_1 - G)\Gamma_2$$

und

$$\Theta = (G_1 + G_2) G\Gamma + (G + G_2) G_1\Gamma_1 + (G - G_2) G_2\Gamma_2$$

entwickelt werden.

Nach Halphén [1] erhält man aus der Identität :

$$\begin{vmatrix} -T & T_1 & T_2 \\ G & G_1 & -G_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{G_1} & -\frac{1}{G_2} \\ G & G_1 & -G_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 & -B_1 \\ P_1 & 3 & P_1^2 - 2P_2 \\ 3 & \frac{-P_2}{-P_3} & P_1 \end{vmatrix}$$

[1] Halphén, *Théorie des fonctions elliptiques.*

folgenden Ausdruck

$$-\frac{\Lambda}{C}\,.\,C^2 = A_1\left(3P_1P_3 - P_1^2P_2 + 2P_2^2\right) - B_1\left(P_1P_2 - 9P_3\right) - 2C_1P_3\left(P_1^2 - 3P_2\right)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$P_1P_2 - 9P_3 = \rho$$

$$P_1^2 - 3P_2 = \lambda, \text{ so folgt}$$

$$\frac{\Lambda^{\mathrm{R}}}{C}\,.\,C^2 = 2\lambda\,.\,\frac{1}{3}P_2r + \rho\left(B_1^{\mathrm{R}} + \frac{1}{3}P_1\,.\,r\right)$$

$$\frac{\Lambda^{\mathrm{U}}}{C}\,.\,C^2 = 2\lambda P_3\,.\,C_1^{\mathrm{U}} + \rho B_1^{\mathrm{U}}$$

$$\frac{\Lambda^{7}}{C}\,C^2 = 2\lambda P_3 C_1^{7} + \rho B_1^{7}$$

Die Grösse C^2 ergiebt sich auf folgenden Weise :

Sind g_2 und g_3 die Invarianten der cubischen Gleichung, deren Wurzeln die G sind, so ist $g_2^3 - 27\,g_3^2$ die Discriminante dieser Gleichung, mithin hat man

$$C_2 = (G + G_2)^2\,.\,(G - G_1)^2\,.\,(G_1 + G_2)^2 = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27\,g_3^2\right)$$

Bezeichnet g die absolute Invariante, so ist, da $g = \dfrac{g_2^3}{27\,g_3^2}$ ist.

$$C^2 = \frac{27}{16}\,.\,g_3^2(g - 1)$$

worin die Invarianten die Werte haben

$$g_2 = \frac{4}{3}\,.\,\lambda$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\left(2P_1\lambda - 3\rho\right),$$

welche Grössen weiter unten bei der Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale wieder vorkommen.

Der andere Coefficient Θ ergiebt sich aus der Identität

$$\begin{vmatrix} G\Gamma & -G_1\Gamma_1 & G_2\Gamma_1 \\ G & G_1 & -G_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ G & G_1 & G_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & -A_1 & \Lambda \\ P_1 & 3 & 0 \\ 3 & -P_2 & -C_3 \\ \frac{G_2+G_1}{G} & \frac{G_2+G}{G_1} & \frac{G_1-G}{G_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & -P_3 & \end{vmatrix}$$

in der Form

$$\Theta \cdot 2\,(P_1^2 - 3P_2) = \Lambda\,(P_1P_2 - 9P_3) + C(P_1A_1 + 3B_1)$$

oder also :

$$\frac{\Theta^R}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^R}{C}\,\rho + 3\,(B_1^R + \frac{1}{3}P_1 r)\right)$$

$$\frac{\Theta^U}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^U}{C}\,\rho + 3\,B_1^U\right)$$

$$\frac{\Theta^Z}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^Z}{C}\,\rho + 3\,B_1^Z\right)$$

Es bleibt also zur Berechnung des Ausdrucks

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda}{C}\left(\eta - \omega\frac{P_1}{3}\right) + \omega\frac{\Theta}{C}\right\}$$

nur noch die Ermittlung der vollständigen elliptischen Integrale ω un η übrig. Die Berechnung dieser Grössen geschieht am bequemsten nach der von Herrn Prof. Bruns angegebenen Methode [1].

Bezeichnen g_2 und g_3 die Coefficienten der cubischen Gleichnng

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

und g die absolute Invariante, so setzt Herr Bruns

$$\omega = \Omega\, g_3^{-\frac{1}{6}} \cdot g_2^{\frac{1}{3}} \text{ und } \eta = \mathrm{H}\, g_3^{\frac{1}{6}}$$

[1] Bruns, *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.*

und findet für Ω und H die Differentialgleichungen

$$g(g-1)\frac{d^2\Omega}{dg_2} + \left(\frac{7}{3}g - \frac{4}{3}\right)\frac{d\Omega}{dg} + \frac{55}{144}\Omega = 0$$

$$g(g-1)\frac{d^2H}{dG_2} + \left(\frac{4}{3}g - \frac{1}{3}\right)\frac{dH}{dg} - \frac{5}{144}H = 0,$$

welche Gleichungen der Differentialgleichung für die Gauss'sche hypergeometrische Reihe entsprechen, nämlich

$$x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \left(x(\alpha+\beta+1)-\gamma\right)\frac{dF}{dx} + \alpha.\beta.F = 0;$$

es würde also gesetzt werden können

$$\Omega = C.F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{3}, g\right)$$

$$H = C'.F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, g\right)$$

wo C und C' zwei Constanten bezeichnen:

Da nun aber

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) =$$

$$x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}.F\left(1-\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,\frac{x-1}{x}\right)$$

ist, so folgt

$$\Omega = C.27^{\frac{1}{12}}.g_2^{-\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right)$$

$$H = C'27^{-\frac{1}{12}}g_2^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1\frac{g-1}{g}\right)$$

Zur Bestimmung der Constanter C und C' kann man setzen

$$g = 1, g_3 = 1 \text{ also } g_2 = 3:$$

in diesem Falle wird, da

$$e_1 = 1, e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}, k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}},$$

und da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{e_1 \omega + \eta_1}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

ist,

$$\eta_1 = -\frac{\pi}{24}$$

Mithin erhält man

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}\, g_2^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right)$$

$$\eta_1 = -\frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}}\, g_2^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

wobei also die Grössen g_2 und g die auf Seite 20 angegebenen Werte haben.

Zur bequemen Berechnung der Perioden ω und η_1 habe ich eine Tafel berechnet, welche mit dem Argument $\frac{g-1}{g} = x$ die beide hypergeometrischen Reihen

$$F_\omega\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right) \text{ und } F_{\eta_1}\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, x\right)$$

giebt.

Wenn das Argument dieser Reihen $> \frac{1}{2}$ wird, so convergieren dieselben sehr langsam. Die Berechnung der Tafel habe ich für diesen Fall auf folgende Weise ausgeführt. Ist das Argument der hypergeometrischen Reihe gleich 1, so wird deren Summe dargestellt durch den Ausdruck

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

oder nach der Gauss'schen Bezeichnung

$$\frac{\Pi(\gamma - 1)\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}$$

wo Γ und Π die bekannte Bedeutung haben.

Da nun weiter

$$\Pi(0) = 1, \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ und } \Pi(\mu) = \mu . \Pi(\mu - 1)$$

ist, so erhält man schliesslich

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1\right) = \frac{77 \cdot \sqrt{\pi}}{144 . \Pi\left(\frac{7}{12}\right) \Pi\left(\frac{11}{12}\right)}$$

$$F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1\right) = \frac{5 \cdot \sqrt{\pi}}{12 . \Pi\left(\frac{5}{12}\right) . \Pi\left(\frac{1}{12}\right)}.$$

Die Logarithmen der hier auftretenden Π-functionen habe ich aus der Gauss'schen Tafel entnommen [1].

Führt man weiter statt x das Argument $1 - x$ ein, so ist allgemein

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = A . F(\alpha, \alpha + \beta - \gamma - 1, 1 - x) + B . (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} . F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x),$$

wobei

$$A = \frac{\Pi(\gamma - 1)\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\Pi(\gamma - \beta - 1)}$$

$$B = \frac{\Pi(\gamma - 1)\Pi(\alpha + \beta - \gamma - 1)}{\Pi(\alpha - 1)\Pi(\beta - 1)}$$

Hiernach wird für die hier in Betracht kommenden hypergeom. Reihen

$$F_\omega\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right) = A_1 . F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 1 - x\right) + B_1 (1 - x)^{\frac{1}{2}} . F\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{2}, 1 - x\right)$$

$$F_\eta\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, x\right) = A_2 . F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 1 - x\right) + B_2 (1 - x)^{\frac{1}{2}} . F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{3}{2}, 1 - x\right)$$

[1] Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem*, etc. Werke III.

und

$$A_1 = F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1 \,.\, 1\right), \quad A_2 = F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, 1 \,.\, 1\right)$$

$$B_1 = -\frac{1}{6} A_2 \qquad B_2 = +\frac{1}{6} A_1$$

$$\log A_1 = 0.040\,77266, \quad \log A_2 = 9{,}939\,19972 - 10;$$

Für Werte des Argumentes, die grösser als 0,980 sind, wird die Interpolation für eine siebenstellige Rechnung wegen der höheren Differenzen der Tafelwerte unsicher; es wird daher zweckmässiger sein, für den speciellen Fall die Reihen direct zu berechnen, wozu nur wenige Glieder nötig sind. Zur Erleichterung der Rechnung gebe ich noch die Coefficienten der vier Reihen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = 1 + c_1(1-x) + c_2(1-x)^2 + c_3(1-x)^3 + \ldots$$

	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, (1-x)\right)$	$F\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{2}, (1-x)\right)$
$lg\, c_1$	8.841 6375	9.478 4596
c_2	8.550 5460	9.249 5160
c_3	8.377 4602	9.100 5639
c_4	8.253 9553	8.989 9089
c_5	8.157 8823	8.901 8194
c_6	8,079 2491	8.828 6286
c_7	8.012 6888	8.766 0164
c_8	7.954 9840	8.711 3067
c_9	7.904 0532	8.662 7260
c_{10}	7.858 4720	8.619 0380

	$F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{2}, (1-x)\right)$	$F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{3}{2}, (1-x)\right)$
$lg\, c_1$	8.987 7655 n	9.478 4596
c_2	8.672 4280 n	9.249 5160
c_3	8.267 0553 n	8.901 8194
c_4	8.492 0937 n	9.100 5639
c_5	8.365 1397 n	8.989 9089
c_6	8.187 1057 n	8.828 6286
c_7	8.119 6172 n	8.766 0164
c_8	8.061 2230 n	8.711 3067
c_9	8.009 7599 n	8.662 7260
c_{10}	7.963 7554 n	8.619 0380

Zusammenstellung der Formeln.

$$\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(K+K_1) = \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega)\sin\tfrac{1}{2}(i_1+i)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(K+K_1) = \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega)\sin\tfrac{1}{2}(i_1-i)$$

$$-\sin\Pi_1\cos J = A\sin A', \qquad -\sin\Pi_1 = B\sin B'$$
$$\cos\Pi_1 = A\cos A', \qquad \cos\Pi_1\cos J = B\cos B'$$

$$A.a_1\cos(A'+\Pi+v) = A_c$$
$$-A.a_1\sin(A'+\Pi+v) = B_c$$
$$a_1\sin\Pi_1\sin J = C_c$$

$$B.a_1\cos\varphi_1\sin(B'+\Pi+v) = A_s$$
$$B.a_1\cos\varphi_1\cos(B'+\Pi+v) = B_s$$
$$a_1\cos\varphi_1\cos\Pi_1.\cos J = C_s$$

$$a_1^2+r^2+2e_1r.A_c = A_o$$
$$e_1a_1^2+r.A_c = B_o\cos\varepsilon; \quad rA_s = B_o\sin\varepsilon; \quad a_1^2e_1^2 = C_o$$

$$P_1 = A_o - C_o; \quad P_2 = B_o^2 - A_oC_o; \quad -P_3 = C_oB_o^2\sin^2\varepsilon$$
$$P_1^2 - 3P_2 = \lambda, \qquad P_1P_2 - 6P_3 = \varrho$$

$$g_2 = \tfrac{4}{3}\lambda, \quad g_3 = \tfrac{4}{27}.(2P_1\lambda - 3\varrho), \quad g = \frac{g_2^3}{27.g_3^2}$$

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}g_2^{-\frac{1}{4}}F_\omega; \qquad \tau = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}}g_2^{-\frac{1}{4}}F_\tau$$

$$\log\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} = 0.22735456, \qquad \log\frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} = 9.68776394-10$$

F_ω und F_τ aus der Tafel mit dem Argument $\frac{g-1}{g}$ zu entnehmen.

$$A_1^R = r, \qquad A_1^U = o, \qquad A_1^Z = o$$

$$B_1^{\mathrm{R}} = -A_o\,(A_c\,e_1 + r) + B_o\cos\varepsilon\left(e_1 r + A_c\,(1 + e_1^2)\right) + A_s B_o \sin\varepsilon - A_c C_o e_1$$

$$B_1^{\mathrm{U}} = -\frac{1}{2} r\,a_1^2 \cos^2\varphi_1 \sin^2 J \sin 2\,(\Pi + v) - r^2 e_1 B_c$$

$$B_1^{\mathrm{Z}} = -A_o C_c e_1 + B_o \cos\varepsilon\, C_c\,(1 + e_1^2) + C_s B_o \sin\varepsilon - C_c C_o e_1$$

$$-P_3\,C_1^{\mathrm{R}} = 0$$

$$-P_3\,C_1^{\mathrm{U}} = A_s r^2 e_1 A B a_1^2 \cos^2\varphi_1 \cos(A' - B')$$

$$-P_3\,C_1^{\mathrm{Z}} = A_s r^2 e_1 (A_c C_s - A_s C_c)$$

$$C^2 = \frac{27}{16}\cdot g_3^2 (g - 1)$$

$$\frac{\Lambda^{\mathrm{R}}}{C}\cdot C^2 = \frac{2}{3}\lambda P_2 r + \varrho\left(B_1^{\mathrm{R}} + \frac{1}{3} P_1 r\right)$$

$$\frac{\Lambda^{\mathrm{U}}}{C}\cdot C^2 = 2\lambda P_3\,C_1^{\mathrm{U}} + \varrho_1 B_1^{\mathrm{U}}$$

$$\frac{\Lambda^{\mathrm{Z}}}{C}\cdot C^2 = 2\lambda P_3\,C_1^{\mathrm{Z}} + \varrho_1 B_1^{\mathrm{Z}}$$

$$\frac{\Theta^{\mathrm{R}}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{\mathrm{R}}}{C}\varrho + 3\left(B_1^{\mathrm{R}} + \frac{1}{3} P_1 r\right)\right)$$

$$\frac{\Theta^{\mathrm{U}}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{\mathrm{U}}}{C}\varrho + 3\,B_1^{\mathrm{U}}\right)$$

$$\frac{\Theta^{\mathrm{Z}}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{\mathrm{Z}}}{C}\varrho + 3\,B_1^{\mathrm{Z}}\right)$$

$$R_o = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{R}}}{C}\left(\omega - \eta\,\frac{P_1}{3}\right) + \omega\cdot\frac{\Theta^{\mathrm{R}}}{C}\right\}$$

$$U_o = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{U}}}{C}\left(\omega - \eta\,\frac{P_1}{3}\right) + \omega\cdot\frac{\Theta^{\mathrm{U}}}{C}\right\}$$

$$Z_o = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{Z}}}{C}\left(\omega - \eta\,\frac{P_1}{3}\right) + \omega\,\frac{\Theta^{\mathrm{Z}}}{C}\right\}$$

Zur Controlle obiger Formeln habe ich dasselbe Beispiel gewählt, welches Hill [1] genommen hat, nämlich die Be-

[1] *On Gauss' Method of computing secular perturbations.* Astron. Papers, Vol. I, Part. V.

rechnung der säcularen Störungen des Mercur durch Venus, und finde für die störenden Kräfte folgende Werte.

Zur Vergleichung, habe ich die Werte von Hill darunter gesetzt; es ist:

$$R_0^{\text{Hill}} = ar.R_0, U_0^{\text{H}} = ar.U_0; Z_0^{\text{H}} = r^2.Z_0$$

E_0	R_0	U_0	Z_0
0°	8.776 0908	6.688 6866 n	7.992 4252 n
nach Hill	8.776 0911	6.688 6872 n	7.992 4224 n
30°	8.809 1989	5.319 0465 n	8.161 0820 n
	2004	515 n	3 n
60°	8.910 9710	6.858 0700	8.246 1370 n
	24	694	81 n
90°	9.047 8433	6.900 2005	8.184 3200 n
	87	47	23 n
120°	9.178 3310	6.691 7100 n	6.560 0071
	01	5 n	86
150°	9.265 6122	7.395 8796 n	8.508 8235
	28	89 n	40
180°	9.286 9007	7.487 4980 n	8.801 0000
	0	8 n	10
210°	9.242 7417	7.152 5108 n	8.836 3574
	27	23 n	93
240°	9.150 8889	6.787 5679 n	8.694 6458
	64	1	48
270°	9.033 3877	7.119 0070	8.398 3407
	67	54	398
300°	8.913 5282	6.862 7030	7.846 5588
	70	6	91
330°	8.817 9259	6.215 7918 n	7.548 4902 n
	43	2	891 n

Nachdem so die Componenten der störenden Kraft ermittelt sind, wird die Berechnung der säcularen Störungen in folgender Weise weitergeführt. Die Bahn des gestörten Körpers wird in 12 Theile getheilt und für jeden derselben, also für $E = 0^0, 30^0, \ldots 330^0$, die nachstehenden Werthe gerechnet:

$$H_{\delta\Omega} = Z_o\, r \sin u$$
$$H_i = Z_o\, r \cos u$$
$$H_e = R_o \sin v + U_o (\cos v + \cos E)$$
$$H\omega = -R_o \cos v + U_o \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v$$
$$H_{M_1} = -r.\, R_o\,.$$

Die gefundenen Werte seien H^0, H^1, H^2 ... H^{11}. Wird dann

$$(H) = \frac{1}{12}(H^0 + H^1 + \ldots + H^{11})$$

gesetzt, so erhält man schliesslich

$$\sin i\,.\,(\delta\Omega)' = \frac{m_1}{1+m}\,.\,a\,\mu \sec\varphi\,.\,(H\omega)$$
$$(\delta i)' = \frac{m_1}{1+m}\,.\,a\,\mu \sec\varphi\,.\,(H_i)$$
$$(\delta e)' = \frac{m_1}{1+m}\,.\,a^2\,\mu \cos\varphi\,.\,(H_e)$$
$$e\,(\delta\omega_1)' = -\frac{m_1}{1+m}\,a^2\,\mu \cos\varphi\,.\,(H\omega)$$
$$(\delta M_1)' = -\frac{m_1}{1+m}\,2\,a\,\mu\,(H_{M_1})$$
$$(\delta\omega)' = \delta\omega_1 - \cos i\,.\,\delta\Omega$$
$$(\delta\pi)' = \delta\omega_1 + 2\sin^2\frac{i}{2}\,.\,\delta\Omega$$
$$(\delta L)' = \delta M_1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.\,\delta\omega_1 + 2\sin^2\frac{i}{2}\,.\,\delta\Omega$$

wobei π die Länge des Perihels, gemessen von einem festenÆ quinoctium, und L die mittlere Länge bezeichnen.

Tafeln der hypergeometrischen Reihen

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right) = F_\omega$$

$$F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, x\right) = F_\eta$$

zur Berechnung der Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung nach den Formeln

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} \cdot g_2^{-\frac{1}{4}} \cdot F_\omega; \qquad \log \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} = 0{,}227\,3545\,6$$

$$\eta_1 = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} \cdot g_2^{\frac{1}{4}} \cdot F_\eta; \qquad \log \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} = 9{,}687\,7639\,4 - 10$$

wobei g_2 und g_3 die Invarianten und

$$g = \frac{g_2^3}{27 \cdot g_3^2}, \quad x = \frac{g-1}{g}$$

sind.

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —	x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.000	1.000 0000	347	1.000 0000	486	0.040	1.001 4107	358	0.998 0267	501
1	0347	348	0.999 9514	487	41	4465	359	0.997 9766	501
2	0695	348	9027	487	42	4824	359	9265	502
3	1043	348	8540	487	43	5183	359	8763	502
4	1391	348	8053	488	44	5542	360	8261	502
5	1739	349	7565	488	45	5902	360	7759	503
6	2088	349	7077	488	46	6262	360	7256	503
7	2437	349	6589	489	47	6622	360	6753	504
8	2786	350	6100	489	48	6982	361	6249	504
9	3136	350	5611	490	49	7343	361	5745	504
0.010	3486	350	5121	490	0.050	7704	361	5241	505
11	3836	350	4631	490	51	8065	362	4736	505
12	4186	351	4141	490	52	8427	362	4231	505
13	4537	350	3651	491	53	8789	362	3726	506
14	4887	351	3160	491	54	9151	362	3220	506
15	5238	352	2669	492	55	9513	363	2714	507
16	5590	352	2177	492	56	9876	363	2207	507
17	5942	352	1685	493	57	1.002 0239	363	1700	507
18	6294	352	1192	493	58	0602	364	1193	508
19	6646	352	0699	493	59	0966	364	0685	508
0.020	6998	353	0206	493	0.060	1330	364	0177	509
21	7351	353	0.998 9713	494	61	1694	364	0.996 9668	509
22	7704	353	9219	494	62	2058	365	9159	509
23	8057	354	8725	495	63	2423	365	8650	510
24	8411	354	8230	495	64	2788	366	8140	510
25	8765	354	7735	495	65	3154	365	7630	511
26	9119	355	7240	495	66	3519	366	7119	511
27	9474	354	6745	496	67	3885	367	6608	511
28	9828	355	6249	497	68	4252	366	6097	512
29	1.001 0183	356	5752	497	69	4618	367	5585	512
0.030	0539	355	5255	497	0.070	4985	367	5073	512
31	0894	356	4758	497	71	5352	368	4561	513
32	1250	356	4261	498	72	5720	368	4048	513
33	1606	356	3763	498	73	6088	368	3535	514
34	1962	357	3265	499	74	6456	368	3021	514
35	2319	357	2766	499	75	6824	369	2507	515
36	2676	357	2267	499	76	7193	369	1992	515
37	3033	358	1768	500	77	7562	369	1477	515
38	3391	358	1268	500	78	7931	370	0962	516
39	3749	358	0768	501	79	7301	370	0446	516
0.040	4107		0267		0.080	8671		0.995 9930	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		−
0.080	1.002 8671	370	0.995 9930	517
81	9041	370	9413	517
82	9411	371	8896	517
83	9782	371	8379	518
84	1.003 0153	372	7861	518
85	0525	372	7343	519
86	0897	372	6824	519
87	1269	372	6305	519
88	1641	373	5786	520
89	2014	373	5266	520
0.090	2387	373	4746	520
91	2760	374	4226	521
92	3134	374	3705	522
93	3508	374	3183	522
94	3882	375	2661	522
95	4257	375	2139	523
96	4632	375	1616	523
97	5007	375	1093	523
98	5382	376	0570	524
99	5758	376	0046	525
0.100	6134	377	0.994 9521	525
01	6511	377	8996	525
02	6888	377	8471	525
03	7265	377	7946	526
04	7642	378	7420	527
05	8020	378	6893	527
06	8398	378	6366	527
07	8776	379	5839	528
08	9155	379	5311	528
09	9534	380	4783	529
0.110	9914	379	4254	529
11	1.004 0293	380	3725	529
12	0673	380	3196	530
13	1053	381	2666	530
14	1434	381	2136	531
15	1815	381	1605	531
16	2196	382	1074	532
17	2578	382	0542	532
18	2960	382	0010	532
19	3342	383	0.993 9478	533
0.120	3725		8945	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		−
0.120	1.004 3725	383	0.993 8945	533
21	4108	383	8412	534
22	4491	384	7878	534
23	4875	384	7344	535
24	5259	384	6809	535
25	5643	385	6274	536
26	6028	385	5738	536
27	6413	385	5202	536
28	6798	385	4666	537
29	7183	386	4129	537
0.130	7569	386	3592	538
31	7955	387	3054	538
32	8342	387	2516	539
33	8729	388	1977	539
34	9117	387	1438	540
35	9504	388	0898	540
36	9892	388	0358	540
37	1.005 0280	389	0.992 9818	541
38	0669	389	9277	541
39	1058	390	8736	542
0.140	1448	389	8194	542
41	1837	390	7652	543
42	2227	391	7109	543
43	2618	391	6566	544
44	3009	391	6022	544
45	3400	391	5478	544
46	3791	392	4934	545
47	4183	392	4389	546
48	4575	392	3843	546
49	4967	393	3297	546
0.150	5360	393	2751	547
51	5753	394	2204	547
52	6147	394	1657	548
53	6541	394	1109	548
54	6935	395	0561	549
55	7330	395	0012	549
56	7725	395	0.991 9463	549
57	8120	395	8914	550
58	8515	396	8364	551
59	8911	397	7813	551
0.160	9308		7262	

x	F_ω	Diff. +	F_{τ_i}	Diff. −	x	F_ω	Diff. +	F_{τ_i}	Diff. −
0.160	1.005 9308	396	0.991 7262	551	0.200	1.007 5461	412	0.989 4828	571
61	9704	397	6711	552	01	5873	412	4257	572
62	1.006 0101	398	6159	552	02	6285	412	3685	572
63	0499	398	5607	553	03	6697	413	3113	573
64	0897	398	5054	553	04	7110	413	2540	573
65	1295	398	4501	554	05	7523	414	1967	573
66	1693	399	3947	554	06	7937	414	1394	574
67	2092	399	3393	555	07	8351	414	0820	575
68	2491	400	3838	555	08	8765	415	0245	575
69	2891	400	3283	556	09	9180	415	0.988 9670	576
0.170	3291	400	1727	556	0.210	9595	415	9094	576
71	3691	401	1171	557	11	1.008 0010	416	8518	577
72	4092	401	0614	557	12	0426	416	7941	577
73	4493	401	0057	558	13	0842	417	7364	578
74	4894	402	0.990 9499	558	14	1259	417	6786	578
75	5296	402	8941	559	15	1676	418	6208	579
76	5698	403	8382	559	16	2094	418	5629	579
77	6101	403	7823	560	17	2512	418	5050	580
78	6504	403	7263	560	18	2930	418	4470	580
79	6907	403	6703	560	19	3348	419	3890	581
0.180	7310	404	6143	561	0.220	3767	420	3309	582
81	7714	404	5582	562	21	4187	420	2727	582
82	8118	405	5020	562	22	4607	420	2145	582
83	8523	405	4458	562	23	5027	421	1563	583
84	8928	406	3896	563	24	5448	421	0980	584
85	9334	406	3333	564	25	5869	421	0396	584
86	9740	406	2769	564	26	6290	422	0.987 9812	585
87	1.007 0146	407	2205	564	27	6712	422	9227	585
88	0553	407	1641	565	28	7134	423	8642	586
89	0960	407	1076	566	29	7557	423	8056	586
0.190	1367	408	0510	566	0.230	7980	424	7470	587
91	1775	408	0.989 9944	566	31	8404	424	6883	587
92	2183	408	9378	567	32	8828	424	6296	588
93	2591	409	8811	568	33	9252	425	5708	588
94	3000	409	8243	568	34	9677	425	5120	589
95	3409	410	7675	568	35	1.009 0102	426	4531	590
96	3819	410	7107	569	36	0528	426	3941	590
97	4229	410	6538	570	37	0954	426	3351	591
98	4639	411	5968	570	38	1380	427	2760	591
99	5050	411	5398	570	39	1807	427	2169	582
0.200	5461		4828		0.240	2234		1577	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.	x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		−			+		−
0.240	1.009 2234	428	0.987 1577	592	0.280	1.010 9682	445	0.984 7441	616
41	2662	428	0985	593	81	1.011 0127	446	6825	616
42	3090	429	0392	593	82	0573	446	6209	617
43	3519	429	0.986 9799	594	83	1019	447	5592	617
44	3948	429	9205	595	84	1466	447	4975	618
45	4377	430	8610	595	85	1913	448	4357	618
46	4807	430	8015	595	86	2361	448	3739	619
47	5237	431	7420	596	87	2809	449	3120	620
48	5668	431	6824	597	88	3258	449	2500	620
49	6099	432	6227	598	89	3707	450	1880	621
0.250	6531	432	5629	598	0.290	4157	450	1259	622
51	6963	432	5031	598	91	4607	450	0637	622
52	7395	433	4433	599	92	5057	451	0015	623
53	7828	433	3834	600	93	5508	452	0.983 9392	623
54	8261	434	3234	600	94	5960	452	8769	624
55	8695	434	2634	601	95	6412	452	8145	625
56	9129	435	2033	601	96	6864	453	7520	626
57	9564	435	1432	602	97	7317	453	6894	626
58	9999	435	0830	602	98	7770	454	6268	626
59	1.010 0434	436	0228	603	99	8224	454	5642	627
0.260	0870	436	0.985 9625	604	0.300	8678	455	5015	628
61	1306	437	9021	604	01	9133	456	4387	629
62	1743	437	8417	605	02	9589	456	3758	629
63	2180	438	7812	605	03	1.012 0045	456	3129	630
64	2618	438	7207	606	04	0501	457	2499	630
65	3056	439	6601	607	05	0958	457	1869	631
66	3495	439	5994	607	06	1415	458	1238	632
67	3934	440	5387	608	07	1873	458	0606	632
68	4374	440	4779	608	08	2331	458	0.982 9974	633
69	4814	440	4171	609	09	2789	459	9341	634
0.270	5254	441	3562	609	0.310	3248	460	8707	634
71	5695	441	2953	610	11	3708	460	8073	635
72	6136	442	2343	611	12	4168	461	7438	636
73	6578	442	1732	611	13	4629	461	6802	636
74	7020	442	1121	612	14	5090	462	6166	637
75	7462	443	0509	612	15	5552	462	5529	637
76	7905	444	0.984 9897	613	16	6014	463	4892	638
77	8349	444	9284	614	17	6477	463	4254	639
78	8793	444	8670	614	18	6940	464	3615	640
79	9237	445	8056	615	19	7404	464	2975	640
0.280	9682		7441		0.320	7868		2335	

x	F_ω	Diff.	F_{τ_i}	Diff.
		+		−
0.320	1.012 7868	465	0.982 2335	641
21	8333	465	1694	641
22	8798	466	1053	642
23	9264	466	0411	643
24	9730	467	0.981 9768	644
25	1.013 0197	467	9124	644
26	0664	468	8480	645
27	1132	468	7835	645
28	1600	469	7190	646
29	2069	469	6544	647
0.330	2538	470	5897	648
31	3008	470	5249	648
32	3478	471	4601	649
33	3949	471	3952	649
34	4420	472	3303	651
35	4892	472	2652	651
36	5364	473	2001	652
37	5837	474	1349	652
38	6311	474	0697	653
39	6785	474	0044	653
0.340	7259	475	0.980 9391	655
41	7734	476	8736	655
42	8210	476	8081	656
43	8686	477	7425	656
44	6163	477	6769	658
45	9640	478	6111	658
46	1.014 0118	478	5453	659
47	0596	479	4794	659
48	1075	479	4135	660
49	1554	480	4475	660
0.350	2034	481	2815	662
51	2515	481	2153	662
52	2996	482	1491	663
53	3478	482	0828	664
54	3960	483	0164	664
55	4443	483	0.979 9500	665
56	4926	484	8835	666
57	5410	484	8169	667
58	5894	485	7502	667
59	6379	485	6835	668
0.360	6864		6167	

x	F_ω	Diff.	F_{τ_i}	Diff.
		+		−
0.360	1.014 6864	486	0.979 6167	669
61	7350	487	5498	669
62	7837	487	4829	670
63	8324	487	4159	671
64	8811	488	3488	672
65	9299	489	2816	673
66	9788	490	2143	673
67	1.015 0278	490	1470	674
68	0768	490	0796	675
69	1258	491	0121	675
0.370	1749	492	0.978 9446	676
71	2241	492	8770	677
72	2733	493	8093	678
73	3226	494	7315	678
74	3720	494	6737	679
75	4214	494	6058	680
76	4708	495	5378	681
77	5203	496	4697	681
78	5699	496	4016	683
79	6195	497	3333	683
0.380	6692	498	2650	684
81	7190	498	1966	684
82	7688	499	1282	686
83	8187	499	0596	686
84	8686	500	0.977 9910	687
85	9186	500	9223	687
86	9686	501	8536	689
87	1.016 0187	502	7847	689
88	0689	502	7158	690
89	1191	503	6468	691
0.390	1694	504	5777	692
91	2198	504	5085	692
92	2702	505	4393	693
93	3207	505	3700	694
94	3712	506	3006	695
95	4218	507	2311	695
96	4725	507	1616	697
97	5232	508	0919	697
98	5740	508	0222	698
99	6248	509	0.976 9524	699
0.400	6757		4825	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.400	1.016 6757	510	0.976 8825	700
01	7267	510	8125	700
02	7777	511	7425	701
03	8288	511	6724	702
04	8799	512	6022	703
05	9311	513	5319	704
06	9824	513	4615	705
07	1.017 0337	514	3910	705
08	0851	515	3205	706
09	1366	515	2499	707
0.410	1881	516	1792	708
11	2397	517	1084	709
12	2914	517	0375	710
13	3431	518	0.975 9665	710
14	3949	519	8955	711
15	4468	519	8244	712
16	4987	520	7532	713
17	5507	520	6819	714
18	6027	521	6105	715
19	6548	522	5390	716
0.420	7070	522	4674	716
21	7592	523	3958	717
22	8115	524	3241	718
23	8639	524	2523	719
24	9163	525	1804	720
25	9688	526	1084	721
26	1.018 0214	527	0363	722
27	0741	527	0.974 9641	722
28	1268	528	8919	724
29	1796	528	8195	724
0.430	2324	529	7471	725
31	2853	530	6746	726
32	3383	531	6020	727
33	3914	531	5293	727
34	4445	532	4566	729
35	4977	532	3837	730
36	5509	533	3107	731
37	6042	534	2376	731
38	6576	535	1645	732
39	7111	535	0913	733
0.440	7646		0180	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.440	1.018 7646	536	0.974 0180	734
41	8182	537	0.973 9446	735
42	8719	537	8711	736
43	9256	538	7975	737
44	9794	539	7238	738
45	1.019 0333	540	6500	738
46	0873	540	5762	740
47	1413	541	5022	740
48	1954	542	4282	742
49	2496	542	3540	742
0.450	3038	543	2798	744
51	3581	543	2054	744
52	4124	545	1310	745
53	4669	545	0565	746
54	5214	546	0.972 9819	747
55	5760	547	9072	748
56	6307	548	8324	749
57	6855	548	7575	750
58	7403	549	6825	751
59	7952	549	6074	752
0.460	8501	550	5322	753
61	9051	551	4569	754
62	9602	552	3815	755
63	1.020 0154	553	3060	755
64	0707	553	2305	757
65	1260	554	1548	758
66	1814	555	0790	759
67	2369	556	0031	759
68	2925	556	0.971 9272	761
69	3481	557	8511	762
0.470	4038	558	7749	763
71	4596	559	6986	763
72	5155	559	6223	765
73	5714	560	5458	765
74	6274	561	4693	767
75	6835	562	3926	768
76	7397	563	3158	769
77	7960	563	2389	769
78	8523	564	1620	771
79	9087	565	0849	771
0.480	9652		0078	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.*
0.480	1.020 9652	566	0.971 0078	773
81	1.021 0218	566	0.970 9305	774
82	0784	567	8531	775
83	1351	568	7756	776
84	1919	569	6980	777
85	2488	570	6203	777
86	3058	570	5426	779
87	3628	571	4647	780
88	4199	572	3867	782
89	4771	573	3085	782
0.490	5344	574	2303	783
91	5918	574	1520	784
92	6492	576	0736	786
93	7068	576	0.969 9950	786
94	7644	577	9164	788
95	8221	577	8376	788
96	8798	579	7588	790
97	9377	579	6798	790
98	9956	580	6008	792
99	1.022 0536	581	5216	793
0.500	1117	582	4423	794
01	1699	583	3629	795
02	2282	584	2834	796
03	2866	584	2038	797
04	3450	585	1241	799
05	4035	586	0442	799
06	4621	587	0.968 9643	801
07	5208	588	8842	801
08	5796	589	8041	803
09	6385	590	7238	804
0.510	6975	590	6434	805
11	7565	591	5629	806
12	8156	592	4823	808
13	8748	593	4015	808
14	9341	594	3207	810
15	9935	595	2397	810
16	1.023 0530	596	1587	812
17	1126	597	0775	813
18	1723	597	0.967 9962	815
19	2320	598	9147	815
0.520	2918		8332	

x	F_η	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.520	1.023 2918	600	0.967 8332	817
21	3518	600	7515	817
22	4118	601	6698	819
23	4719	602	5879	820
24	5321	603	5059	822
25	5924	603	4237	822
26	6527	605	3415	824
27	7132	606	2591	824
28	7738	607	1767	826
29	8345	607	0941	827
0.530	8952	608	0114	829
31	9560	609	0.966 9285	829
32	1.024 0169	611	8456	831
33	0780	611	7625	832
34	1391	612	6793	834
35	2003	613	5959	834
36	2616	614	5125	836
37	3230	615	4289	837
38	3845	616	3452	839
39	4461	617	2613	839
0.540	5078	618	1774	841
41	5696	618	0933	841
42	6314	620	0092	844
43	6934	621	0.965 9248	844
44	7555	622	8404	846
45	8177	622	7558	847
46	8799	624	6711	848
47	9423	625	5863	849
48	1.025 0048	626	5014	852
49	0674	626	4162	852
0.550	1300	628	3310	854
51	1928	628	2456	854
52	2556	630	1602	856
53	3186	630	0746	857
54	3816	632	0.964 9889	859
55	4448	633	9030	860
56	5081	634	8170	862
57	5715	634	7308	862
58	6349	636	6446	864
59	6985	636	5582	865
0.560	7624		4717	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —	x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.560	1.025 7621	638	0.964 4717	867	0.600	1.028 3980	682	0.960 8951	925
61	8259	639	3850	868	01	4662	684	8026	926
62	8898	640	2982	869	02	5346	685	7100	928
63	9538	641	2113	870	03	6031	686	6172	929
64	1.026 0179	642	1243	872	04	6717	687	5243	931
65	0821	643	0371	874	05	7404	689	4312	933
66	1464	644	0.963 9497	875	06	8093	689	3379	934
67	2108	645	8622	876	07	8782	691	2445	935
68	2753	646	7746	878	08	9473	692	1510	937
69	3399	647	6868	878	09	1.029 0165	694	0573	939
0.570	4046	649	5990	880	0.610	0859	695	0.959 9634	941
71	4695	649	5110	882	11	4554	696	8693	942
72	5344	651	4228	883	12	2250	697	7751	944
73	5995	651	3345	885	13	2947	699	6807	946
74	6646	652	2460	886	14	3646	700	5861	947
75	7298	654	1574	887	15	4346	701	4914	949
76	7952	655	0687	889	16	5047	702	3965	950
77	8607	656	0.962 9798	890	17	5749	704	3015	952
78	9263	657	8908	892	18	6453	705	2063	954
79	9920	658	8016	893	19	7158	706	1109	955
0.580	1.027 0578	659	7123	894	0.620	7864	707	0154	958
81	1237	661	6229	896	21	8571	709	0.958 9196	959
82	1898	662	5333	898	22	9280	710	8237	961
83	2560	662	4435	899	23	9990	712	7276	962
84	3222	663	3536	900	24	1.030 0702	713	6314	964
85	3885	665	2636	902	25	1415	714	5350	966
86	4550	667	1734	903	26	2129	715	4384	967
87	5217	667	0831	905	27	2844	717	3417	969
88	5884	668	0.961 9926	906	28	3561	718	2448	971
89	6552	669	9020	908	29	4279	720	1477	973
0.590	7221	671	8112	909	0.630	4999	722	0504	974
91	7892	672	7203	910	31	5721	722	0.957 9530	976
92	8564	673	6293	913	32	6443	723	8554	978
93	9237	674	5380	914	33	7166	725	7576	980
94	9911	675	4466	915	34	7891	727	6596	982
95	1.028 0586	676	3551	917	35	8618	728	5614	984
96	1262	678	2634	918	36	9346	729	4630	985
97	1940	679	1716	920	37	1.031 0075	731	3645	987
98	2619	680	0796	922	38	0806	732	2658	989
99	3299	681	0.960 9874	923	39	1538	733	1669	991
0.600	3980		8951		0.640	2271		0678	

x	F_ω	*Diff.* +	F_{η_i}	*Diff.* −
0.640	1.031 2271		0.957 0678	
		735		993
41	3006	737	0.956 9685	994
42	3743	738	8691	996
43	4481	739	7695	998
44	5220	741	6697	1000
45	5961	742	5697	1002
46	6703	743	4695	1004
47	7446	745	3691	1006
48	8191	747	2685	1008
49	8938	748	1677	1010
0.650	8686	750	0667	1012
51	1.031 0436	751	0.955 9655	1013
52	1187	752	8642	1016
53	1939	754	7626	1017
54	2693	756	6609	1019
55	3449	757	5590	1022
56	4206	759	4568	1023
57	4965	760	3545	1025
58	5725	762	2520	1028
59	6487	763	1492	1029
0.660	7250	765	0463	1031
61	8015	766	0.954 9432	1034
62	8781	768	8398	1035
63	9549	770	7363	1038
64	1.032 0319	771	6325	1040
65	1090	773	5285	1041
66	1863	774	4244	1043
67	2637	776	3201	1046
68	3413	778	2155	1048
69	4191	779	1107	1050
0.670	4970	781	0057	1053
71	5751	783	0.953 9004	1054
72	6534	784	7950	1057
73	7318	786	6893	1058
74	8104	788	5835	1061
75	8892	789	4774	1063
76	9681	791	3711	1065
77	1.033 0472	793	2646	1067
78	1265	794	1579	1070
79	2059	796	0509	1071
0.680	2855		0.952 9438	

x	F_ω	*Diff.* +	F_{η_i}	*Diff.* −
0.680	1.034 2855		0.952 9438	
		798		1074
81	3653	799	8364	1076
82	4452	801	7288	1079
83	5253	803	6209	1080
84	6056	805	5129	1083
85	6861	807	4046	1086
86	7668	808	2960	1088
87	8476	810	1872	1090
88	9286	812	0782	1092
89	1.035 0098	814	0.951 9690	1094
0.690	0912	816	8596	1097
91	1728	817	7499	1099
92	2545	819	6400	1102
93	3364	821	5298	1104
94	4185	823	4194	1106
95	5008	824	3088	1108
96	5832	826	1980	1111
97	6658	829	0869	1114
98	7487	831	0.950 9755	1116
99	8318	832	8639	1119
0.700	9150	834	7520	1121
01	9984	837	6399	1123
02	1.036 0821	838	5276	1126
03	1659	840	4150	1128
04	2499	842	3022	1131
05	3341	843	1891	1134
06	4184	846	0757	1136
07	5030	848	0.949 9621	1139
08	5878	850	8482	1141
09	6728	852	7341	1144
0.710	7580	854	6197	1146
11	8434	856	5051	1149
12	9290	858	3902	1152
13	1.037 0148	860	2750	1154
14	1008	862	1596	1157
15	1870	864	0439	1159
16	2734	866	0.948 9280	1162
17	3600	868	8118	1166
18	4468	870	6952	1168
19	5338	873	5784	1170
0.720	6211		4614	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. −
0.720	1.037 6211	875	0.948 4614	1173
21	7086	877	3441	1176
22	7963	879	2265	1179
23	8842	881	1086	1181
24	9723	883	0.947 9905	1185
25	1.038 0606	886	8720	1187
26	1492	888	7533	1190
27	2380	890	6343	1193
28	3270	892	5150	1196
29	4162	894	3954	1198
0.730	5056	897	2756	1201
31	5953	899	1555	1205
32	6852	901	0350	1208
33	7753	904	0.946 9142	1210
34	8657	906	7932	1213
35	9563	908	6719	1217
36	1.039 0471	910	5502	1220
37	1381	913	4282	1222
38	2294	915	3060	1225
39	3209	918	1835	1229
0.740	4127	920	0606	1232
41	5047	923	0.945 9374	1235
42	5970	925	8139	1238
43	6895	927	6901	1241
44	7822	930	5660	1244
45	8752	932	4416	1248
46	9684	935	3168	1251
17	1.040 0619	937	1917	1254
48	1556	940	0663	1257
49	2496	943	0.944 9406	1260
0.750	3439	945	8146	1263
51	4384	947	6883	1267
52	5331	950	5616	1271
53	6281	953	4345	1274
54	7234	955	3071	1277
55	8189	958	1794	1280
56	9147	961	0514	1284
57	1.041 0108	963	0.943 9230	1288
58	1071	966	7942	1291
59	2037	969	6651	1294
0.760	3006		5357	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. −
0.760	1.041 3006	971	0.943 5357	1298
61	3977	974	4059	1301
62	4951	977	2758	1305
63	5928	980	1453	1308
64	6908	983	0145	1312
65	7891	985	0.942 8833	1316
66	8876	988	7517	1320
67	9864	991	6197	1323
68	1.042 0855	994	4874	1327
69	1849	997	3547	1330
0.770	2846	999	2217	1334
71	3845	1003	0883	1338
72	4848	1006	0.941 9545	1342
73	5854	1008	8203	1345
74	6862	1011	6858	1349
75	7873	1015	5509	1354
76	8888	1018	4155	1358
77	9906	1021	2797	1361
78	1.043 0927	1023	1436	1365
79	1950	1027	0071	1369
0.780	2977	1030	0.947 8702	1373
81	4007	1033	7329	1377
82	5040	1037	5952	1381
83	6077	1040	4571	1386
84	7117	1042	3185	1390
85	8159	1046	1795	1394
86	9205	1049	0401	1398
87	1.044 0254	1053	0.939 9003	1402
88	1307	1056	7601	1406
89	2363	1059	6195	1411
0.790	3422	1063	4784	1415
91	4485	1066	3369	1420
92	5551	1069	1949	1424
93	6620	1073	0525	1428
94	7693	1077	0.938 9097	1433
95	8770	1080	7664	1437
96	9850	1083	6227	1442
97	1.045 0933	1087	4785	1447
98	2020	1091	3338	1451
99	3111	1094	1887	1455
0.800	4205		0432	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* −
0.800	1.045 4205		0.938 0432	
01	5303	1098	0.937 8972	1460
02	6404	1101	7507	1465
03	7509	1105	6037	1470
04	8618	1109	4562	1475
05	9731	1113	3082	1480
06	1.046 0847	1116	1598	1484
07	1967	1120	0110	1488
08	3091	1124	0.936 8616	1494
09	4219	1128	7117	1499
		1132		1504
0.810	5351		5613	
11	6487	1136	4104	1509
12	7627	1140	2590	1514
13	8771	1144	1071	1519
14	9918	1147	0.935 9547	1524
15	1.047 1070	1152	8017	1530
16	2226	1156	6482	1535
17	3386	1160	4942	1540
18	4551	1165	3396	1546
19	5719	1168	1845	1551
		1173		1557
0.820	6892		0288	
21	8069	1177	0.934 8726	1562
22	9251	1182	7159	1567
23	1.048 0437	1186	5585	1574
24	1627	1190	4006	1579
25	2822	1195	2421	1585
26	4021	1199	0830	1591
27	5225	1204	0.933 9234	1596
28	6433	1208	7632	1602
29	7646	1213	6024	1608
		1218		1614
0.830	8864		4410	
31	1.049 0086	1222	2789	1621
32	1313	1227	1163	1626
33	2545	1232	0.932 9531	1632
34	3781	1236	7893	1638
35	5022	1242	6248	1645
36	6269	1247	4597	1651
37	7521	1252	2940	1657
38	8777	1256	1276	1664
39	1.050 0038	1261	0.931 9606	1670
		1267		1677
0.840	1305		7929	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* −
0.840	1.050 1305		0.931 7929	
41	2577	1272	6246	1683
42	3854	1277	4556	1680
43	5136	1282	2859	1697
44	6423	1287	1155	1704
45	7716	1293	0.930 9444	1711
46	9015	1299	7727	1717
47	1.051 0319	1304	6003	1724
48	1628	1309	4272	1731
49	2943	1315	2533	1739
		1320		1746
0.850	4263		0787	
51	5589	1326	0.929 9034	1753
52	6922	1333	7273	1761
53	8260	1338	5505	1768
54	9604	1344	3729	1776
55	1.052 0954	1350	1946	1783
56	2310	1356	0155	1791
57	3672	1362	0.928 8356	1799
58	5040	1368	6549	1807
59	6415	1375	4734	1815
		1381		1823
0.860	7796		2914	
61	9183	1387	1080	1831
62	1.053 0577	1394	0.927 9241	1839
63	1977	1400	7393	1848
64	3384	1407	5537	1856
65	4798	1414	3673	1864
66	6218	1420	1800	1873
67	7645	1427	0.926 9918	1882
68	9080	1435	8027	1891
69	1.054 0521	1441	6128	1899
		1447		1909
0.870	1968		4219	
71	3423	1455	2301	1918
72	4885	1462	0374	1927
73	6354	1469	0.925 8437	1937
74	7831	1477	6491	1946
75	9315	1484	4535	1956
76	1.055 0807	1492	2570	1965
77	2306	1499	0595	1975
75	3813	1507	0.924 8610	1985
79	5328	1515	6615	1995
		1523		2005
0.880	6851		4610	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* −
0.880	1.055 6851	1532	0.924 4610	2016
81	8383	1540	2594	2026
82	9923	1548	0568	2037
83	1.056 1471	1556	0.923 8531	2047
84	3027	1565	6484	2059
85	4592	1574	4425	2069
86	6166	1583	2356	2080
87	7749	1591	0276	2092
88	9340	1601	0.922 8184	2104
89	1.057 0941	1609	6080	2115
0.890	2550	1619	3965	2127
91	4169	1628	1838	2139
92	5797	1638	0.921 9699	2151
93	7435	1647	7548	2164
94	9082	1657	5384	2176
95	1.058 0739	1668	3208	2189
96	2407	1677	1019	2202
97	4084	1688	0.920 8817	2215
98	5772	1698	6602	2228
99	7470	1708	4374	2241
0.900	9178	1720	2133	2255
01	1.059 0898	1730	0.919 9878	2270
02	2628	1741	7608	2284
03	4369	1753	5324	2298
04	6122	1764	3026	2313
05	7886	1776	0713	2327
06	9662	1788	0.918 8386	2342
07	1.060 1450	1799	6044	2358
08	3249	1812	3686	2374
09	5061	1824	1312	2389
0.910	6885	1837	0.917 8923	2405
11	8722	1849	6518	2422
12	1.061 0571	1863	4096	2439
13	2434	1876	1657	2455
14	4310	1889	0.916 9202	2472
15	6199	1903	6730	2491
16	8102	1917	4239	2509
17	1.062 0019	1932	1730	2526
18	1951	1946	0.915 9204	2545
19	3897	1962	6659	2564
0.020	5859		4095	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* −
0.920	1.062 5859	1976	0.915 4095	2584
21	7835	1992	1511	2602
22	9827	2009	0.914 8909	2623
23	1.063 1836	2025	6286	2644
24	3861	2041	3642	2666
25	5902	2057	0976	2687
26	7959	2075	0.913 8289	2709
27	1.064 0034	2092	5580	2730
28	2126	2110	2850	2752
29	4236	2128	0098	2774
0.930	6364	2147	0.912 7324	2799
31	8541	2166	4525	2824
32	1.065 0677	2185	1701	2849
33	2862	2206	0.911 8852	2875
34	5068	2225	5977	2900
35	7293	2247	3077	2926
36	9540	2268	0151	2954
37	1.066 1808	2289	0.910 7197	2981
38	4097	2313	4216	3011
39	6410	2335	1205	3040
0.940	8745	2359	0.909 8165	3070
41	1.067 1104	2383	5095	3101
42	3487	2408	1994	3132
43	5895	2434	0.908 8862	3165
44	8329	2460	5697	3199
45	1.068 0789	2487	2498	3232
46	3276	2514	0.907 9266	3268
47	5790	2544	5998	3304
48	8334	2572	2694	3341
49	1.069 0906	2603	0.906 9353	3380
0.950	3509	2634	5973	3420
51	6143	2667	2553	3461
52	8810	2699	0.905 9092	3504
53	1.070 1509	2734	5588	3547
54	4243	2770	2041	3592
55	7013	2807	0.904 8449	3638
56	9820	2844	4811	3686
57	1.071 2664	2884	1125	3736
58	5548	2924	0.903 7389	3788
59	8472	2967	3601	3842
0.960	1.072 1439		0.902 9759	

x	F_ω	*Diff.*	F_η	*Diff.*	x	F_ω	*Diff.*	F_η	*Diff.*
		+		—			+		—
0.960	1.072 1439	3010	0.902 9759	3898	0.980	1.079 3332	4520	0.893 6990	5812
61	4449	3056	5861	3955	81	7852	4657	1178	5984
62	7505	3104	1906	4016	82	1.080 2509	4806	0.892 5194	6171
63	1.073 0609	3154	0.901 7890	4080	83	7315	4967	0.891 9023	6375
64	3763	3205	3810	4144	84	1.081 2282	5143	2648	6601
65	6968	3260	0.900 9666	4213	85	7425	5338	0.890 6047	6847
66	1.074 0228	3315	5453	4285	86	1.082 2763	5553	0.889 9200	7120
67	3543	3374	1168	4359	87	8316	5796	2080	7426
68	6917	3436	0.899 6809	4436	88	1.083 4112	6070	0.888 4654	7773
69	1.075 0353	3500	2373	4520	89	1.084 0182	6380	0.887 6881	8167
0.970	3853	3569	0.898 7853	4605	0.990	1.084 6562	6741	0.886 8714	8622
71	7422	3641	3248	4697	91	1.085 3303	7164	0092	9158
72	1.076 1063	3716	0.897 8551	4792	92	1.086 0467	7668	0.885 0934	9796
73	4779	3796	3759	4894	93	1.086 8135	8288	0.884 1138	10579
74	8575	3881	0.896 8865	5002	94	1.087 6423	9069	0.883 0559	11568
75	1.077 2456	3971	3863	5116	95	1.088 5492	10103	0.881 8991	12873
76	6427	4066	0.895 8747	5236	96	1.089 5595	11559	0.880 6118	14712
77	1.078 0493	4168	3511	5365	97	1.090 7154	13836	0.879 1406	17595
78	4661	4277	0.894 8146	5504	98	1.092 0990	18244	0.877 3811	23165
79	8938	4394	2642	5652	99	1.093 9234	45073	0.875 0646	57065
0.980	1.079 3332		0.893 6990		1.000	1.098 4307		0.869 3581	

Vita.

Natus sum Erfordiae anno MDCCCLXI a. d. VII Kalendas Decembres patre Ferdinando, matre Sophia e gente Weise, quam defunctam doleo. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum rudimentis in ludo elementari imbutus gymnasium reale erfordinense ab anno LXXII frequentavi. Anno LXXXI maturus inventus qui universitatem adirem anno post in album huius almae matris Friderico-Guilelmae inscriptus sum. Per sex ibi annos studiis et mathematicis et astronomicis operam dedi. Quo tempore observationum in regis specula, quam dicunt astronomica, instituendarum benigne comiterque participem me fecit ill. Foerster atque una cum ill. Tietjen, quem nuper jam animum exspirasse omnes lugent, ad exercitationes seminarii astronomici me admisit. Armis deinde latis ab anno LXXXVIII in regia specula berolinensi calculando occupatum anno XCII Helvetii speculae novocastellensi me adjunxerunt.

Viros clarissimos audivi docentes hosce: Dilthey, Eichler, Foerster, Fuchs, Glan, v. Helmholtz, Hettner, Kayser, G. Kirchhoff, Knoblauch, Kronecker, Lasson, Lazarus, Lehmann-Filhés, Paulsen, Tietjen, v. Treitschke, Wangerin, Weyerstrass, Zeller.

Quibus viris omnibus optime de me meritis imprimis autem praeclarissimis Foerster et Tietjen ex animi sententia gratias ago quam maximas atque animum gratum piumque semper servabo.

Thesen.

1) Die bisherigen astronomischen Messungen enthalten keine Gewähr, dass nicht fortschreitende Bewegungen der Erdaxe im Erdkörper bis zu einer Minute im Jahrtausend noch vorhanden sind.

2) Die Verschiebungen von Spektrallinien lassen sich nicht in allen Fällen auf Bewegungen der Lichtquelle zurückführen.

3) Die Erforschung der Aberrations-Erscheinungen bedarf noch erheblicher Vervollständigungen.